DEVOIR MAISON III

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

1. Ce devoir n'est pas noté. Vous pouvez utiliser toutes les ressources qui vous semblent pertinentes mais il est vivement conseillé de vous mettre dans des conditions d'examen. Si vous avez besoin de vous référer au cours, assurez-vous de mémoriser les résultats ou méthodes qui vous ont servi.
2. Vous pouvez travailler à plusieurs mais de préférence en petits groupes de 3 ou 4 étudiants. Faites alors attention à laisser chacun s'exprimer et participer à la résolution de l'exercice. Ne passez pas à la question suivante avant de vous être assurés que chaque membre du groupe a compris la solution.
3. Dans ce cas, indiquez les autres étudiants avec qui vous avez travaillé.
4. Même dans le cas d'un travail en commun, chacun doit **rédiger sa propre solution**.
5. L'un des objectifs de ce devoir est de perfectionner sa qualité de rédaction. Vous prendrez donc soin d'attacher une importance particulière à votre manière de rédiger (précision du raisonnement, résultats du cours cités avec rigueur, faire attention aux connexions logiques,...).

Date: 4 Novembre 2024.
http://louismerlin.fr.

Première partie : Étude d'une fonction périodique.

On admet **l'existence et l'unicité** d'une fonction $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ satisfaisant aux conditions (C1)-(C2) suivantes :

(C1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s''(t) + s(t) = 0$.

(C2) $s(0) = 0$ et $s'(0) = 1$.

On pose $c(t) = s'(t)$.

1. On commence par démontrer quelques propriétés élémentaires des fonctions s et c.

a. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c'(t) = -s(t)$.

b. On pose $h(t) = c^2(t) + s^2(t)$. Montrer que h est une fonction constante.

c. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c^2(t) + s^2(t) = 1$.

d. Montrer que s et c sont bornées sur $\mathbb{R}$.

2. On montre dans cette question qu'il existe $\theta > 0$ tel que $s(\theta) = 0$. On raisonne par l'absurde en supposant que, pour tout $\theta > 0$, $s(\theta) \neq 0$.

a. Montrer que pour tout $\theta > 0$, $s(\theta) > 0$ et $s''(\theta) < 0$.

b. (i) Montrer que $c(t)$ admet une limite ℓ lorsque $t \to +\infty$.

(ii) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s(t) = \displaystyle\int_0^t c(x)dx$.

(iii) Montrer que $\ell = 0$. (*Indication : on raisonnera par l'absurde en supposant que $\ell > 0$ ou $\ell < 0$.*)

c. (i) Montrer que $c(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$.

(ii) Montrer que $s(t)$ admet une limite $\gamma > 0$ quand $t \to +\infty$.

(iii) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c(t) = 1 - \displaystyle\int_0^t s(x)dx$.

(iv) Conclure.

On a donc montré que s s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$. On **admettra** que la plus petite valeur d'annulation de s est π.

À l'aide des conditions (C1) et (C2), on peut aussi montrer facilement, et **on l'admettra**, que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $s(-t) = -s(t)$ (c'est-à-dire que la fonction s est impaire) et $s(t) = s(\pi - t)$.

3. **a.** Montrer que c est une fonction paire.

b. Montrer que la fonction ϕ définie par $\phi(t) = s(t + 2\pi)$ vérifie aussi les conditions (C1)-(C2). En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s(t + 2\pi) = s(t)$. La fonction s est donc **périodique** de période 2π.

c. Montrer que c est périodique de période 2π.

d. (i) Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $c(\theta) = 0$.

(ii) Montrer que s admet en θ son maximum sur $[0, \pi]$.

(iii) Montrer que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(iv) On pose $\gamma(t) = c\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que γ satisfait (C1)-(C2). En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s(t) = c\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $R(t) = \begin{pmatrix} c(t) & -s(t) \\ s(t) & c(t) \end{pmatrix}$.

a. Calculer $R(0)$.

b. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de $R(t)$.

c. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer l'inverse de $R(t)$.

d. Discuter en fonction de t l'existence de valeurs propres pour $R(t)$.

e. (i) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un réel fixé. On définit la fonction ψ_θ en posant pour $t \in \mathbb{R}$, $\psi_\theta(t) = s(t-\theta)c(\theta) + c(t-\theta)s(\theta)$. Montrer que ψ_θ satisfait les conditions (C1)-(C2).

(ii) Montrer que pour tout couple de réels (u, v), on a $s(u+v) = s(u)c(v) + s(v)c(u)$.

(iii) Montrer que pour tout couple de réels (u, v), on a aussi $c(u+v) = c(u)c(v) - s(u)s(v)$.

(iv) Pour tout couple de réels (u, v), calculer le produit $R(u)R(v)$.

5. **a.** Montrer que s est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b. Montrer que s définit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.
On note a la bijection réciproque.

6. **a.** (i) Montrer que a est dérivable sur $]-1, 1[$.

(ii) Montrer que $c(a(t)) = \sqrt{1-t^2}$ pour tout $t \in [-1, 1]$.

(iii) Montrer que, pour tout $t \in]-1, 1[$, on a $a'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

b. (i) Montrer que $a(1) = \frac{\pi}{2}$ et $a(-1) = \frac{-\pi}{2}$.

(ii) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi$.

(iii) Montrer que la fonction g définie par $g(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}$ pour tout $t \in]-1, 1[$ et $g(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R} \backslash]-1, 1[$, est une densité de probabilités.

Deuxième Partie : intégrale de Gauss

On considère une suite d'intégrale $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^n(t) dt,$$

où c est la fonction étudiée dans la partie précédente. Celle-ci étant continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie

7. Calculer W_0 et W_1.

8. À l'aide d'un changement de variable affine et de la question **3.d.**(iv), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} s^n(t) dt,$$

où s est la fonction étudiée dans la partie I.

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geqslant 0$ et que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

10. À l'aide d'une intégration par parties et de la question **1.c**, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.$$

En déduire que

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

11. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = (n+1)W_n W_{n+1}$.
En calculant $J_{n+1} - J_n$, montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et préciser sa valeur.

12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$

13. Montrer que $W_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} W_n$. Obtenir finalement que

$$W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

On s'intéresse maintenant au calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (sans faire appel au résultat admis en cours).

14. Justifier soigneusement la convergente de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

15. Montrer que, pour tout $t \in [0,1[$, $\ln(1-t) \leqslant -t$.

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Déduire de la question précédente que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx.$$

17. Montrer de même, qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

18. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}c(u)$, montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$

On admet que le changement de variable $x = \sqrt{n}\frac{s(u)}{c(u)}$ est licite et permet d'obtenir

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

On a dont l'encadrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

19. À l'aide de la question **13**, conclure sur la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.